

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ**  
**КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

**Гашева Екатерина Владимировна**

Магистерская диссертация

**Методы анализа робастной устойчивости линейных  
систем с запаздыванием**

Направление 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа

«Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель  
засл. работник ВШ РФ,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор

Жабко А.П.

Рецензент  
доктор технич. наук,  
доцент

Сапрыкин А.В.

Санкт – Петербург  
2017 г.

## Содержание

Введение .....	3
1. Основные обозначения и определения .....	5
2. Математические модели эпидемии гриппа .....	7
2.1. Общие сведения о течении болезни.....	7
2.2. Статистические данные .....	7
2.3. Математическая модель эпидемии гриппа «Барояна-Рвачева».....	8
2.4. Простейшая динамическая модель .....	9
3. Методы анализа робастной устойчивости линейных систем с запаздыванием. ....	11
3.1 Методы исследования .....	11
3.1.1 Метод функционалов Ляпунова-Красовского .....	11
3.1.2 Метод D-разбиений .....	16
3.2 Постановка задачи .....	18
3.3 Результаты .....	19
3.3.1 Скалярный случай.....	19
3.3.1 Матричный случай.....	26
Выводы .....	39
Список литературы .....	40
Приложение .....	41

## Введение

Хотя отдельные уравнения с отклоняющимся аргументом появились в литературе во второй половине *XVIII* столетия, но систематическое изучение таких уравнений началось лишь с середины прошлого века [2], [5].

Частным случаем уравнений с отклоняющимся аргументом являются уравнения с запаздыванием [4]. Системы с запаздыванием находят много приложений в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении проблем возникающих в биологии, химии, медицине, экономике и во многих других областях науки и техники.

Запаздыванием может быть время обработки информации или время химической реакции. В эпидемиологии, например, запаздыванием может оказаться инкубационный период заболевания или время, когда человек заразен. Так появляется задача анализа устойчивости системы с запаздыванием.

Методы прогнозирования инфекционной заболеваемости активно развиваются с начала *XX* века. Одна из работ на эту тематику была выполнена в 60-е годы в СССР акад. О. В. Барояном и проф. Л. А. Рвачевым. Ими была разработана новая методология математического моделирования эпидемий – эпиддинамика. Данная методология [2] основана на методе научной аналогии в отображении эпидемического процесса (процесс «переноса» возбудителя инфекции от больных к здоровым) с процессом «переноса» материи (энергии, импульса и др.) в уравнениях математической физики. В последние годы число работ на эту тему стремительно растет благодаря развертыванию информационных систем надзора и появлению больших объемов статистики [8], [9], доступной для анализа.

Таким образом, **целью работы** является изучение методов анализа оценки робастной устойчивости линейных систем с запаздыванием, рассмотрение примеров их применения, и нахождение допустимых областей изменения неопределенных параметров при анализе устойчивости линейных

систем с запаздыванием. Кроме того, была построена математическая модель развития эпидемии гриппа в виде системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа.

Магистерская диссертация состоит из введения, трех глав, выводов, библиографического списка и приложения. **Первая глава** носит вспомогательный характер – в ней описаны основные обозначения и определения для дифференциальных систем с запаздыванием.

**Вторая глава** описывает математические модели эпидемии гриппа. В параграфе 2.1 описаны общие сведения о заболевании вирусом гриппа. Статистические данные, необходимые для исследования, приведены в параграфе 2.2. В параграфе 2.3 показана математическая модель эпидемии гриппа Барояна-Рвачева, а в параграфе 2.4 простейшая модель эпидемии гриппа.

В **третьей главе** проводится анализ областей устойчивости решений линейных систем с запаздыванием. В параграфе 3.1 описаны основные методы исследования: метод функционалов Ляпунова-Красовского (параграф 3.1.1), метод D-разбиения (параграф 3.1.2). В параграфе 3.2 идет постановка задачи, а в параграфе 3.3 её решение, разбитое на два случая: скалярный случай (параграф 3.3.1), матричный случай (параграф 3.3.2).

В **приложении** описана реализация в среде Matlab алгоритма нахождения допустимых областей устойчивости в пространстве неопределенных параметров.

# 1. Основные обозначения и определения

Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются [5] дифференциальные уравнения, в которые неизвестная функция и ее производные входят при различных значениях аргумента. Например,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \tau > 0.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с  $l$  отклонениями аргумента

$$x^{(m_0)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(m_0-1)}(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_l(t)), \dots, x^{(m_l)}(t - \tau_l(t))),$$

где отклонения  $\tau_i(t) \geq 0$ ,  $\mu = \max_{0 \leq i \leq l} m_i = n$ . Здесь под  $x^{(k)}(t - \tau_i(t))$  понимается  $k$ -я производная от функции  $x(z)$ , взятая в точке  $z = t - \tau_i(t)$ . Обозначим  $\lambda = m_0 - \mu$ . Уравнения, для которых  $\lambda > 0$ , называются уравнениями с запаздывающим аргументом. Уравнения, для которых  $\lambda = 0$ , называются уравнениями нейтрального типа. Уравнения, для которых  $\lambda < 0$ , называются уравнениями опережающего типа.

Рассмотрим функционал

$$f: [0, \infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

который определяет дифференциальную систему с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (1)$$

$\varphi: [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – начальная функция, принадлежащая пространству кусочно-непрерывных функций, определенных на сегменте  $[-h; 0]$ :  $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ .  $x(t, \varphi)$  – решение системы (1) при начальном условии  $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta), \theta \in [-h; 0]$ .  $x_t(\varphi)$  – функция сужения решения системы (1) на сегменте  $[t - h; t]$ :

$$x_t(\varphi): \theta \rightarrow x(t + \theta, \varphi), \theta \in [-h; 0].$$

Нулевое решение системы (1) называется [7] устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  и для любого  $t_0 \geq 0$  существует  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое что для

любой начальной функции  $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ ,  $\|\varphi\|_h < \delta(\varepsilon, t_0)$  выполняется следующее неравенство:

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Если величина  $\delta(\varepsilon, t_0)$  может быть выбранной не зависящей от  $t_0$ , тогда нулевое решение называется *равномерно устойчивым*.

Нулевое решение системы (1) называется *асимптотически устойчивым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  и для любого  $t_0 \geq 0$  существует  $\Delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что для любой начальной функции  $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ ,  $\|\varphi\|_h < \Delta(\varepsilon, t_0)$  следует, что:

1.  $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ , для любого  $t \geq t_0$ .
2.  $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$  при  $t - t_0 \rightarrow \infty$ .

Нулевое решение системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво* если величина  $\Delta(t_0, \varepsilon)$  может быть выбрана не зависящей от  $t_0$ , и существует  $H_1 > 0$  такое, что  $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$  при  $t - t_0 \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $t_0 \geq 0$  и  $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ ,  $\|\varphi\|_h \leq H_1$ .

Нулевое решение системы (1) называется *экспоненциально устойчивым*, если существует  $\Delta_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ , и  $\gamma \geq 1$ , такое, что для любого  $t_0 \geq 0$  и любой начальной функции  $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ ,  $\|\varphi\|_h < \Delta_0$  выполняется следующее неравенство:

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq \gamma \|\varphi\|_h e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

## **2. Математические модели эпидемии гриппа**

### **2.1. Общие сведения о течении болезни**

Грипп – это острое вирусное заболевание, которое может поражать верхние и нижние дыхательные пути, сопровождается выраженной интоксикацией и может приводить к серьезным осложнениям и летальным исходам, в основном у пожилых больных и детей.

Источником инфекции является больной человек. Механизм передачи гриппа – аэрозольный, вирус распространяется воздушно-капельным путем. Выделение происходит со слюной и мокротой (при кашле, чихании, разговоре). Вирусы могут попасть на слизистые носа, глаз или верхних дыхательных путей непосредственно из воздуха, при тесном контакте с больным человеком; а могут оседать на различных поверхностях и далее попадать на слизистые оболочки через руки или при использовании общих с больным предметов гигиены.

Инкубационный период при гриппе очень короткий – от заражения до первых проявлений заболевания проходит в среднем от нескольких часов до 2 суток (А, С), реже до 4 суток (грипп В). Человек становится заразным спустя 12 часов после попадания вируса в организм.

Грипп всегда начинается остро – больной может точно указать время начала симптомов. Инфекционный период длится около 5 дней. Обычно через 2-5 суток вирус перестает выделяться в окружающую среду, т.е. больной человек перестает быть опасным. Полное излечение от болезни у большинства 1-2 недели.

### **2.2. Статистические данные**

Рассмотрим статистику заболевания гриппом по Ленинградской области [8], [9] в период с 03.10.2016 (40-я неделя 2016) по 04.12.2016 (48-я неделя 2016). Всего население Ленинградской области на 2016 год составляет 1778890 человек.

В таблице приведено количество заболевших и привитых людей по неделям.

Неделя	Количество заболевших	Привито
40-я неделя	8276 чел. (5609 чел.- дети)	272041 чел. (46236 чел. - дети)
41-я неделя	7733 чел. (5453 чел. - дети)	305131 чел. (59726 чел. - дети)
42-я неделя	8109 чел.	445001 чел.
43-я неделя	8100 чел. (5664 чел. - дети)	595290 чел. (109688 чел. - дети)
44-я неделя	7971 чел.	613200 чел.
45-я неделя	7943 чел.	657874 чел.
46-я неделя	7912 чел.	676956 чел.
47-я неделя	7857 чел.	689660 чел.
48-я неделя	7819 чел. (5428 чел. - дети)	694454 чел. (111632 чел. - дети)

### 2.3. Математическая модель эпидемии гриппа «Барояна-Рвачева»

Математическая модель эпидемии гриппа «Барояна-Рвачева» [1] представляет собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями:

1. Число восприимчивых лиц  $X(t)$  среди населения города:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{P(t)}X(t) \int Y(\tau, t)d\tau,$$

с начальным условием  $X(t_0) = \alpha P(t_0)$ .

2. Число лиц в инкубационном периоде гриппа:

$$\frac{\partial U(\tau, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial U(\tau, t)}{\partial t} = -\gamma(\tau)U(\tau, t),$$

где  $U(\tau, t_0)$  – предыстория эпидемии на её начало.

3. Число невосприимчивых лиц:



$$\frac{dZ(t)}{dt} = \int \delta(\tau)Y(\tau, t) d\tau,$$

с начальным условием  $Z(t_0) = (1 - \alpha)P(t_0)$ .

4. Число лиц с различными клиническими формами гриппа:

$$\frac{\partial Y(\tau, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial Y(\tau, t)}{\partial t} = \gamma(\tau)U(\tau, t) - \delta(\tau)Y(\tau, t),$$

где  $Y(\tau, t_0)$  – предыстория эпидемии на её начало.

5. Граничные условия эпидемии (процесс заражения):

$$U(0, t) = \frac{\lambda}{P(t)}X(t) \int Y(\tau, t)d\tau;$$

$$Y(0, t) = 0.$$

Здесь:  $t > 0$  – календарное время развития эпидемии (дни);

$\tau > 0$  – «внутреннее» время развития инфекционного процесса;

$P$  – население территории;

$Y(t)$  – больные;

$X(t)$  – восприимчивые;

$\lambda$  – средняя частота передачи возбудителя от инфекционных больных к восприимчивым;

$\gamma(\tau)$  – функция развития периода инкубации;

$\delta(\tau)$  – функция периода развития инфекции;

$\alpha > 0$  – доля восприимчивых среди людей.

## 2.4. Простейшая динамическая модель

Для начала введем обозначения используемые в данной модели:

$N$  – население территории;

$x(t)$  – плотность заболевших в момент времени  $t$ ;

$y(t)$  – число больных в момент времени  $t$ ;

$T$  – длительность течения болезни;

$\tau - (\tau > 0)$  – временной интервал с момента попадания вируса в организм, до момента, когда человек становится заразным;

$\tilde{T} - (\tilde{T} < T - \tau)$  - временной интервал с момента, когда человек перестает быть заразным, до окончания болезни;

$\tilde{N}$  – восприимчивые люди.

Простейшая динамическая модель эпидемии гриппа выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = x(t) - x(t - T) \\ \dot{x}(t) = a(0,9x(t - \tilde{T}) - x(t - T + \tau)) \end{cases} \quad ,$$

где  $a = a_1(\tilde{N} - y(t))$  ( $a_1$ - коэффициент восприимчивых людей).

Первое уравнение системы описывает скорость распространения эпидемии, а второе уравнение - угасание эпидемии. Сравним данную модель с моделью Барояна-Рвачева, эта модель более простая, но при этом она не учитывает аспекты, которые учитывает модель Барояна-Рвачева, например, лиц с различными клиническими формами гриппа. Но данную модель можно доработать, тогда она будет учитывать и такие аспекты. Так же можно поставить задачу управления данным процессом, которая отражает затраты на вакцинации населения против гриппа. Но даже без этого, эта простейшая динамическая модель отображает динамику развития эпидемии гриппа.

### 3. Методы анализа робастной устойчивости линейных систем с запаздыванием.

В пункте 3.1 излагаются методы исследования анализа робастной устойчивости, такие как метод функционалов Ляпунова-Красовского (параграф 3.1.1) и метод D-разбиения (параграф 3.1.2). В пункте 3.2 сформулирована постановка задачи. А в пункте 3.3 применение метода функционалов Ляпунова-Красовского проиллюстрировано на примере двух задач: скалярного уравнения (параграф 3.3.1) и системы из двух уравнений (параграф 3.3.2).

#### 3.1 Методы исследования

##### 3.1.1 Метод функционалов Ляпунова-Красовского

###### Общий случай.

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m A_j x(t - h_j), \quad (2)$$

здесь  $x \in R^n, A_j \in R^{n \times n}, j = 0, 1, \dots, m$ , - заданные постоянные матрицы,  $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h$  - постоянные запаздывания, упорядоченные по возрастанию. Начальный момент времени считается нулевым, начальная функция  $\varphi$  - кусочно-непрерывной вектор-функцией, определенной на отрезке  $[-h, 0]$ . Решение системы (2) с начальной вектор-функцией  $\varphi$  будем обозначать через  $x(t, \varphi)$ , а сегмент траектории  $x(t, \varphi)$  на промежутке  $[t - h, t]$ ,  $\{x(\xi, \varphi) | \xi \in [t - h, t]\}$ , через  $x_t(\varphi)$ . Если начальная вектор-функция решения будет очевидна из контекста или не существенна, то аргумент  $\varphi$  в обозначениях будет опущен. В качестве векторной нормы будем использовать евклидову норму, а для оценок векторных функций - равномерную норму

$$\|\varphi\|_h = \max_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Характеристическим уравнением системы (2) называется уравнение

$$\det \left( \lambda E - \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda h_j} \right) = 0,$$

Здесь  $E$  – единичная матрица. Корни этого уравнения называются собственными числами системы.

Матрица  $W$  – положительно-определенная т.е.  $W > 0$ . Величины  $\lambda_{\min}(W)$  и  $\lambda_{\max}(W)$  – наименьшее и наибольшее собственные числа симметрической матрицы  $W$ .  $K(t)$  – фундаментальная матрица системы (2), которая является решением матричного уравнения

$$\dot{K}(t) = \sum_{j=0}^m K(t - h_j) A_j, \quad t \geq 0,$$

с начальным условием:  $K(\theta) = 0_{n \times n}$ ,  $\theta \in [-h, 0)$  и  $K(0) = E$ . Здесь  $E$  – единичная матрица порядка  $n \times n$ . Решение  $x(t, \varphi)$  системы (2) может быть представлено в виде

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 K(t - \theta - h_j) A_j \varphi(\theta) d\theta, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Формула (3) известна как формула Коши для решения системы (2).

### Функционалы Ляпунова полного типа

**Теорема 1 (об устойчивости).** [7] Нулевое решение системы (2) устойчиво, если и только если существует положительно-определенный функционал  $v(t, \varphi)$  такой что вдоль решения системы значение функционала  $v(t, x_t)$  не возрастает.

**Теорема 2 (Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости).** [4] Система (2) экспоненциально устойчива, если существует функционал  $v: PC([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такой, что

1. найдутся  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 > 0$  такие, что

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2, \quad \varphi \in PC([-h; 0], \mathbb{R}^n),$$

2. для некоторого  $\beta > 0$  на решениях системы (2) выполняется условие

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leq -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geq 0.$$

Пусть система (2) экспоненциально устойчива. Выберем квадратичную форму  $w_0(x) = x^T W x$  и построим функционал  $v_0(\cdot)$ .

Известно [6], что функционал, по построению удовлетворяющий соотношению

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -w_0(x(t)), \quad t \geq 0,$$

вдоль решений системы (2), имеет вид

$$v_0(x_t) = x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 U(-\theta - h_j) A_j x(t + \theta) d\theta + \\ + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-h_k}^0 x^T(t + \theta_1) A_k^T \left[ \int_{-h_j}^0 U(\theta_1 + h_k - \theta_2 - h_j) A_j x(t + \theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1. \quad (4)$$

Здесь

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t + \tau) dt$$

матрица Ляпунова системы (2) ассоциированная с симметрической положительно-определенной матрицей  $W$ . По определению матрица Ляпунова является решением системы уравнений

$$U'(\tau) = \sum_{j=0}^m U(\tau - h_j) A_j, \quad \tau \geq 0,$$

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

$$\sum_{j=0}^m [U(-h_j) A_j + A_j^T U(h_j)] = -W.$$

Условием существования функционала (4) для произвольной симметрической матрицы  $W$  является условие Ляпунова. В случае

экспоненциальной устойчивости системы (2) функционал (4) положительно определен, однако для него не существует квадратичной оценки снизу вида  $v_0(x_t) \geq \mu \|x(t)\|^2, \mu > 0$ . Такую оценку допускает функционал [6] полного типа

$$v(x_t) = v_0(x_t) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 x^T(t+\theta) [W_j + (h_j + \theta)W_{m+j}] x(t+\theta) d\theta.$$

Здесь симметрические матрицы  $W_0, \dots, W_{2m}$  положительно определены, а матрица Ляпунова, определяющая функционал  $v_0$ , ассоциирована с матрицей

$$W = W_0 + \sum_{j=1}^m [W_j + h_j W_{m+j}].$$

Вдоль решений системы (2) выполняется соотношение

$$\frac{dv(x_t)}{dt} = -w(x_t), \quad t \geq 0,$$

где

$$\begin{aligned} w(x_t) = & x^T(t) W_0 x(t) + \sum_{j=1}^m x^T(t-h_j) W_j x(t-h_j) + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 x^T(t+\theta) W_{m+j} x(t+\theta) d\theta. \end{aligned}$$

### **Численные методы построения матриц Ляпунова.**

Рассмотрим вопрос построения матриц Ляпунова для систем (2). Начнем с частного случая кратных запаздываний:  $h_j = jh, j = 0, 1, \dots, m$ . Введем  $2m$  вспомогательных матриц

$$X_k(\tau) = U(\tau + kh), \quad \tau \in [0, h], \quad k = -m, -m+1, \dots, m-1. \quad (5)$$

Непосредственным дифференцированием легко проверить, что

$$X'_k(\tau) = \sum_{j=0}^m X_{k-j}(\tau) A_j, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (6)$$

$$X'_k(\tau) = - \sum_{j=0}^m A_j^T X_{k+j}(\tau), \quad k = -m, -m+1, \dots, -1. \quad (7)$$

Объединяя уравнения (6), (7), получим систему  $2m$  линейных матричных дифференциальных уравнений без запаздывания для  $2m$  вспомогательных матриц (5). Для отыскания решения этой системы, которое соответствует матрице Ляпунова, воспользуемся следующими граничными условиями:

$$X_{k+1}(0) = X_k(h), \quad k = -m, -m+1, \dots, m-2,$$

$$A_0^T X_0(0) + X_0(0) A_0 + \sum_{j=0}^m [A_j^T X_{j-1}(h) + X_{j-1}^T(h) A_j] = -W.$$

Первые  $2m-1$  граничных условий следуют из определения матриц (5), а последнее суть алгебраического свойства матрицы Ляпунова, переписанное в терминах вспомогательных матриц (5).

### Частный случай.

Рассмотрим случай, когда  $m = 1$ . Тогда линейная дифференциальная система примет вид

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad (8)$$

здесь  $x \in R^n$ ,  $A_0, A_1$ , - заданные постоянные матрицы,  $h$  - запаздывание.

Тогда вспомогательные матрицы (5) примут вид

$$X_{-1}(\tau) = U(\tau-h), \quad X_0(\tau) = U(\tau), \quad \tau \in [0, h].$$

Подставив  $m = 1$  в (6) и (7) получим систему

$$\begin{cases} X'_0(\tau) = X_0(\tau) A_0 + X_{-1}(\tau) A_1 \\ X'_{-1}(\tau) = -A_0^T X_{-1}(\tau) - A_1^T X_0(\tau) \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} X_0(0) = X_{-1}(h) \\ A_0^T X_0(0) + X_0(0) A_0 + A_0^T X_{-1}(h) + X_{-1}^T(h) A_0 + A_1^T X_0(h) + X_0^T(h) A_1 = -W \end{cases}$$

Матрица Ляпунова  $U(\tau)$ , в данном случае будет удовлетворять условиям

$$U'(\tau) = U(\tau) A_0 + U(\tau-h) A_1, \quad \tau \geq 0,$$

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \tau \geq 0,$$

$$U(0)A_0 + A_0^T U(0) + U(-h)A_1 + A_1^T U(-h) = -W.$$

Пусть система (8) является экспоненциально устойчивой. Выберем квадратичную форму  $w_0(x) = x^T W x$  и построим функционал  $v_0(\cdot)$ , производная вдоль решения (8) удовлетворяет равенству

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -w_0(x(t)), \quad t \geq 0.$$

Выражение (4) при  $m = 1$  примет вид

$$\begin{aligned} v_0(x_t) = & x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 U(-\theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta + \\ & + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1)A_1^T \left[ \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2)A_1x(t + \theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Выберем функционал

$$\begin{aligned} w(x_t) = & x^T(t)W_0x(t) + x^T(t - h)W_1x(t - h) + \\ & + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)W_2x(t + \theta)d\theta. \end{aligned}$$

С этой целью положим

$$W = W_0 + W_1 + hW_2$$

и построим соответствующий функционал (9). По построению

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -x^T(t)[W_0 + W_1 + hW_2]x(t), \quad t \geq 0.$$

Тогда при  $m = 1$  получим функционал вида

$$v(x_t) = v_0(x_t) + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)[W_1 + (h + \theta)W_2]x(t + \theta)d\theta.$$

### 3.1.2 Метод D-разбиений

**Теорема 3.** [5] *Если для уравнения с запаздывающим аргументом характеристический квазиполином имеет простые чисто мнимые корни, а остальные корни имеют отрицательные действительные части, то*



*решения уравнения устойчивы, если же хотя бы один корень характеристического квазиполинома имеет положительную действительную часть, то решения уравнения неустойчивы.*

Нули характеристического квазиполинома  $\varphi(z)$  при фиксированном отклонении  $\tau$  являются непрерывными функциями его коэффициентов (предполагается неравенство нулю коэффициентов при главном члене, что всегда выполнено для уравнений с запаздывающим аргументом).

Разобьем пространство коэффициентов на области гиперповерхностями, точкам которых соответствуют квазиполиномы, имеющие хотя бы один нуль на мнимой оси (случай  $z = 0$  не исключается). Такое разбиение называется  $D$ -разбиением.

Очевидно, что точкам каждой области такого  $D$ -разбиения соответствуют квазиполиномы с одинаковым числом нулей с положительной действительной частью, так как изменение числа нулей с положительной действительной частью может произойти при непрерывном изменении коэффициентов лишь при переходе нуля через мнимую ось, т.е. при переходе точки в пространстве коэффициентов через границу области  $D$ -разбиения.

Итак, каждой области  $u_k$   $D$ -разбиения можно отнести число  $k$  – число нулей с положительными действительными частями квазиполинома, определяемого точками этой области. Среди областей этого, разбиения находится и области  $u_0$  (если они существуют), которым соответствуют квазиполиномы, не имеющие ни одного корня с положительной действительной частью. Эти области являются областями асимптотической устойчивости для решения соответствующих рассматриваемым квазиполиномам стационарных линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Таким образом, исследование на устойчивость методом  $D$ -разбиения в пространстве коэффициентов (или иных параметров, от которых могут зависеть коэффициенты и отклонения аргументов) проводится по следующей схеме: находим  $D$ -разбиение и выделяем из него области  $u_0$ . Для выделения

области  $u_0$ , если она связна, достаточно убедиться, что хотя бы одна её точка соответствует квазиполиному, все нули которого имеют отрицательную действительную часть.

Для выяснения того, как изменяется число корней с положительной действительной частью при переходе через некоторую границу  $D$ -разбиения, вычисляется дифференциал действительной части корня и по его знаку судят об уменьшении или увеличении числа корней с положительной действительной частью.

Если  $\varphi(z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = 0$  – характеристическое уравнение, содержащее параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = - \sum_{i=0}^p \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i, \quad z = x + iy,$$

$$dx = -Re \frac{\sum_{i=0}^p \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Обычно  $dx$  вычисляется по некоторой границе  $D$ -разбиения при изменении лишь одного параметра, изменение которого гарантирует переход через рассматриваемую границу  $D$ -разбиения.

### 3.2 Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему уравнений вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - h), \quad (10)$$

где  $h$  - запаздывание. Назовем её номинальной системой.

Коэффициенты такой системы зачастую являются неопределёнными поэтому реальная система даже в линейном приближении описывается системой уравнений вида:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta_1)x(t) + (B + \Delta_2)x(t - h), \quad (11)$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  – неопределённые параметры.

Необходимо найти допустимые значения этих неопределенных параметров, при которых номинальная система остается устойчива. Будем решать эту задачу методом функционалов Ляпунова-Красовского. Для этого необходимо построить матрицу Ляпунова, и функционал Ляпунова полного типа для номинальной системы (10), дифференцировать полученный функционал в силу системы (11) и определить, когда будет выполняться условие теоремы 2.

Данный подход будет проиллюстрирован на решении двух примеров:

1. Когда  $A$  и  $B$  в уравнение (10) являются скалярными величинами,  $A = a = 0$ ,  $B = b = -1$ . При запаздывании  $h = 1$ . В данном случае матрицу Ляпунова необходимо построить для функционала

$$W(x_t) = -x^2(t) - \int_{-1}^0 x^2(t + \tau) d\tau - x^2(t - 1).$$

2. Когда  $A$  и  $B$  в уравнении (10) являются матрицами,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

И запаздывание  $h = 1$ . Также, для этого примера, рассмотрим случай замены неопределённых параметров в системе (11):  $\Delta_1 = \Delta_1 \tilde{A}$ ,  $\Delta_2 = \Delta_2 \tilde{B}$ .

### 3.3 Результаты

#### 3.3.1 Скалярный случай

Рассмотрим первый случай, когда коэффициенты уравнения (10) являются скалярными величинами. Введем 2 вспомогательные матрицы

$$X_{-1}(\tau) = U(\tau - h), \quad X_0(\tau) = U(\tau), \quad \tau \in [0, h].$$

Тогда получим систему

$$\begin{cases} X'_0(\tau) = X_0(\tau)a + X_{-1}(\tau)b \\ X'_{-1}(\tau) = -aX_{-1}(\tau) - bX_0(\tau) \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} X_0(0) = X_{-1}(h) \\ aX_0(0) + X_0(0)a + aX_{-1}(h) + X_{-1}^T(h)a + bX_0(h) + X_0^T(h)b = -W \end{cases}$$

Подставим значения  $a, b$  и  $W = -3$ , что следует из условия, а также заменим для удобства

$$X_0(\tau) = x(\tau), X_{-1}(\tau) = y(\tau),$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(\tau) = -y(\tau) \\ y'(\tau) = x(\tau) \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} x(0) = y(h) \\ x(h) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Решим эту систему:

Продифференцируем второе уравнение получим

$$x' = y''.$$

Подставим в первое и получим однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + y = 0.$$

Решив его, получили систему

$$\begin{cases} x(\tau) = -c_1 \sin \tau + c_2 \cos \tau \\ y(\tau) = c_1 \cos \tau + c_2 \sin \tau \end{cases}$$

где  $c_1, c_2 = \text{const}$ . Найдём частное решение, соответствующее начальным условиям

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \cos h + c_2 \sin h \\ -c_1 \sin h + c_2 \cos h = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Отсюда получим что,

$$c_1 = -\frac{3}{2}$$

$$c_2 = -\frac{3 \cos h}{2 - 2 \sin h}$$

Подставим их в систему и проведем максимальные упрощения. В итоге получим следующую систему

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{3(\sin \tau - \cos(h - \tau))}{2(1 - \sin h)} \\ y(\tau) = \frac{3(\sin(h - \tau) - \cos \tau)}{2(1 - \sin h)} \end{cases}$$

Теперь перейдем к матрице Ляпунова

$$U(\tau) = x(\tau) = \frac{3(\sin \tau - \cos(h - \tau))}{2(1 - \sin h)}.$$

Проверим что это действительно так, для этого должно быть выполнено условие

$$x(\tau) = y(h - \tau).$$

Для этого найдем

$$y(h - \tau) = \frac{3(\sin(h - h + \tau) - \cos(h - \tau))}{2(1 - \sin h)} = \frac{3(\sin \tau - \cos(h - \tau))}{2(1 - \sin h)} = x(\tau).$$

Проверка выполнена, следовательно,  $x(\tau)$  и есть матрица Ляпунова.

Переходим к отысканию функционала Ляпунова полного типа. Пусть система (10) является экспоненциально устойчивой. Выберем квадратичную форму  $w_0(x) = x^T W x$  и построим функционал  $v_0(\cdot)$ , производная вдоль решения (10) удовлетворяет равенству

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -w_0(x(t)), \quad t \geq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_0(x_t) = & x^2(t)U(0) - 2x(t) \int_{-h}^0 U(-\theta - h)x(t + \theta)d\theta + \\ & + \int_{-h}^0 x(t + \theta_1) \left[ \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2)x(t + \theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1. \end{aligned}$$

Теперь выберем функционал

$$w(x_t) = x^2(t)W_0 + x^2(t-h)W_1 + \int_{-h}^0 x^2(t+\theta)W_2 d\theta.$$

С этой целью положим

$$W = W_0 + W_1 + hW_2$$

и построим соответствующий функционал. По построению

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -x^2(t)[W_0 + W_1 + hW_2], \quad t \geq 0.$$

Таким образом получили функционал

$$\begin{aligned} v(x_t) = & x^2(t)U(0) - 2x(t) \int_{-h}^0 U(-\theta-h)x(t+\theta)d\theta + \\ & + \int_{-h}^0 x(t+\theta_1) \left[ \int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1 + \\ & + \int_{-h}^0 x^2(t+\theta)[W_1 + (h+\theta)W_2]d\theta. \end{aligned}$$

Из условия задачи видно, что  $W_1 = -1$ ,  $W_2 = -1$ . Подставим в этот функционал найденную ранее матрицу Ляпунова. Выпишем отдельно матрицу Ляпунова с разными значениями  $\tau$ .

$$U(0) = \frac{3(-\cos h)}{2(1 - \sin h)},$$

$$U(-\theta-h) = U(\theta+h) = \frac{3(\sin(\theta+h) - \cos(-\theta))}{2(1 - \sin h)},$$

$$U(\theta_1 - \theta_2) = \frac{3(\sin(\theta_1 - \theta_2) - \cos(h - \theta_1 - \theta_2))}{2(1 - \sin h)}.$$

Тогда функционал примет вид

$$\begin{aligned} v(x_t) = & -x^2(t) \frac{3 \cos h}{2(1 - \sin h)} - \\ & - 2x(t) \int_{-h}^0 \frac{3(\sin(\theta+h) - \cos(-\theta))}{2(1 - \sin h)} x(t+\theta)d\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-h}^0 x(t + \theta_1) \left[ \int_{-h}^0 \frac{3(\sin(\theta_1 - \theta_2) - \cos(h - \theta_1 - \theta_2))}{2(1 - \sin h)} x(t + \theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1 + \\
& + \int_{-h}^0 x^2(t + \theta)[-1 - h - \theta] d\theta.
\end{aligned}$$

Найдем производную этого функционала

$$\begin{aligned}
& \frac{dv(x_t)}{dt} \Big|_{\dot{x}(t) = (a_0 + \Delta_1)x(t) + (b_0 + \Delta_2)x(t-h)} = \\
& = \frac{dv(x_t)}{dt} \Big|_{\dot{x}(t) = \Delta_1 x(t) - x(t-h) - \Delta_2 x(t-h)} = \\
& = -x^2(t)[W_0 - \Delta_1(2|U(0)| + h) - \Delta_2] - x^2(t-h)[W_1 - \Delta_2(|U(0)| + h)] - \\
& - \left[ W_2 - (\Delta_1 + \Delta_2) \max_{0 \leq \theta \leq h} |U(-\theta - h)|^2 \right] \int_{-h}^0 x^2(t + \theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Получили систему вида

$$\begin{cases} W_0 - \Delta_1(2|U(0)| + h) - \Delta_2 > 0 \\ W_1 - \Delta_2(|U(0)| + h) > 0 \\ W_2 - (\Delta_1 + \Delta_2) \max_{0 \leq \theta \leq h} |U(-\theta - h)|^2 > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Подставим в эту систему полученную матрицу Ляпунова и значения  $W_0, W_1, W_2$ , тогда система примет вид

$$\begin{cases} 1 - \Delta_1 \left( 2 \left| \frac{3(-\cos h)}{2(1 - \sin h)} \right| + h \right) - \Delta_2 > 0 \\ 1 - \Delta_2 \left( \left| \frac{3(-\cos h)}{2(1 - \sin h)} \right| + h \right) > 0 \\ 1 - (\Delta_1 + \Delta_2) \max_{0 \leq \theta \leq h} \left| \frac{3(\sin(\theta + h) - \cos(-\theta))}{2(1 - \sin h)} \right|^2 > 0 \end{cases}$$

Решим эту систему для запаздывания  $h = 1$ , получим

$$\begin{cases} 1 - 11.125\Delta_1 - \Delta_2 > 0 \\ 1 - 6.0625\Delta_2 > 0 \\ 1 - 297.56(\Delta_1 + \Delta_2) > 0 \end{cases}.$$

Представим решение этой системы в графическом виде (Рис. 1.), где пунктирной линией отображено первое неравенство системы, штрихпунктирной – второе неравенство, сплошной – третье неравенство. Таким образом область устойчивости решения уравнения (10) методом функционалов Ляпунова-Красовского для скалярного случая, при положительных  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  является область, выделенная серым цветом.

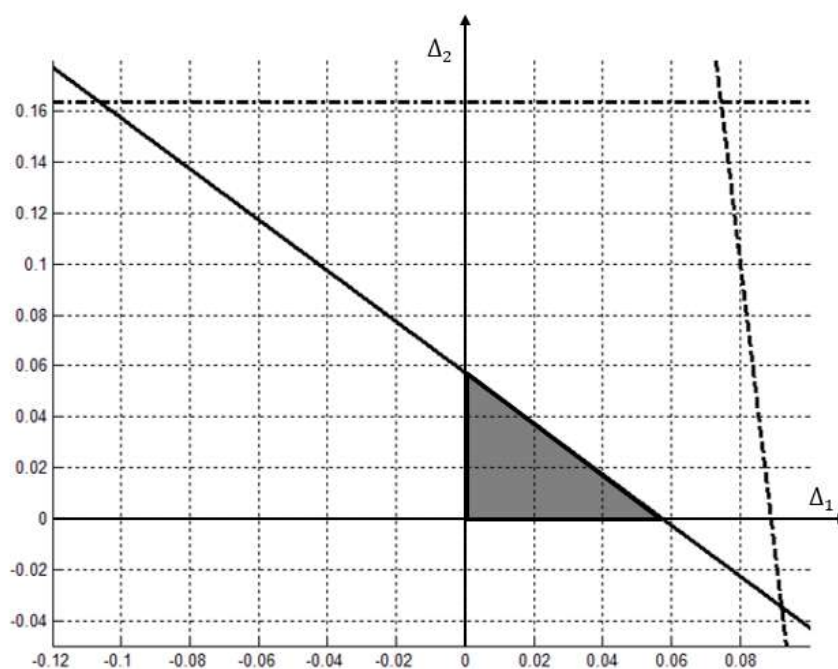


Рис. 1. Графическое представление решения системы (12), при

$$W_0 = W_1 = W_2 = 1.$$

Рассмотрим область асимптотической устойчивости уравнения (10), полученную решением этого уравнения методом D-разбиения (Рис.2.). При положительных  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  областью устойчивости, является область, выделенная серым цветом.



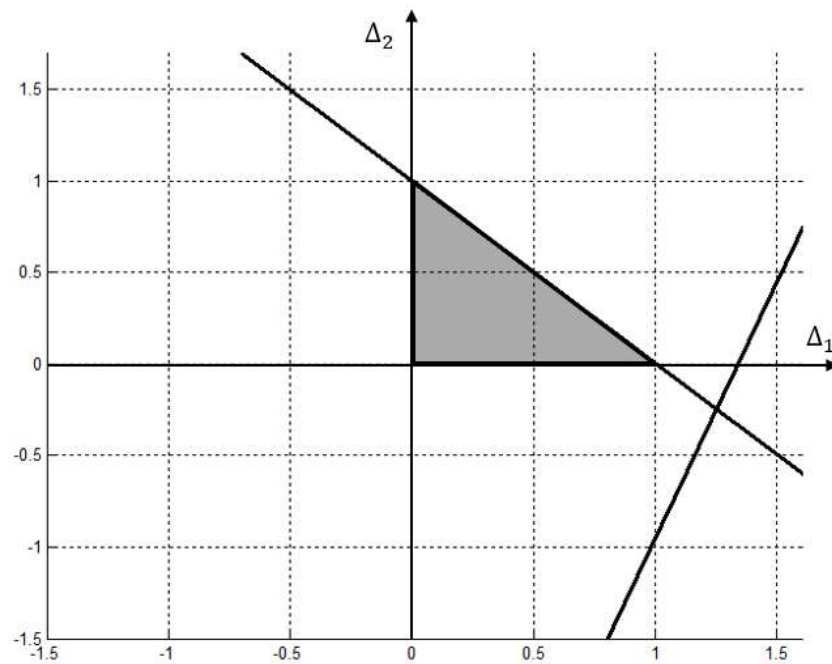


Рис.2. Область устойчивости уравнения (10) полученная методом D-разбиения.

Для сравнения наложим область асимптотической устойчивости уравнения (10), полученную методом D-разбиения (Рис. 2) на область устойчивости этого уравнения полученную методом функционалов Ляпунова-Красовского (Рис.1). Видно, что на пересечении этих областей, при положительных  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , будет область устойчивости, полученная методом Ляпунова-Красовского.

Варьируя значения  $W_0, W_1, W_2$  в системе (12), получим более широкую область устойчивости уравнения (10) (Рис. 3.).

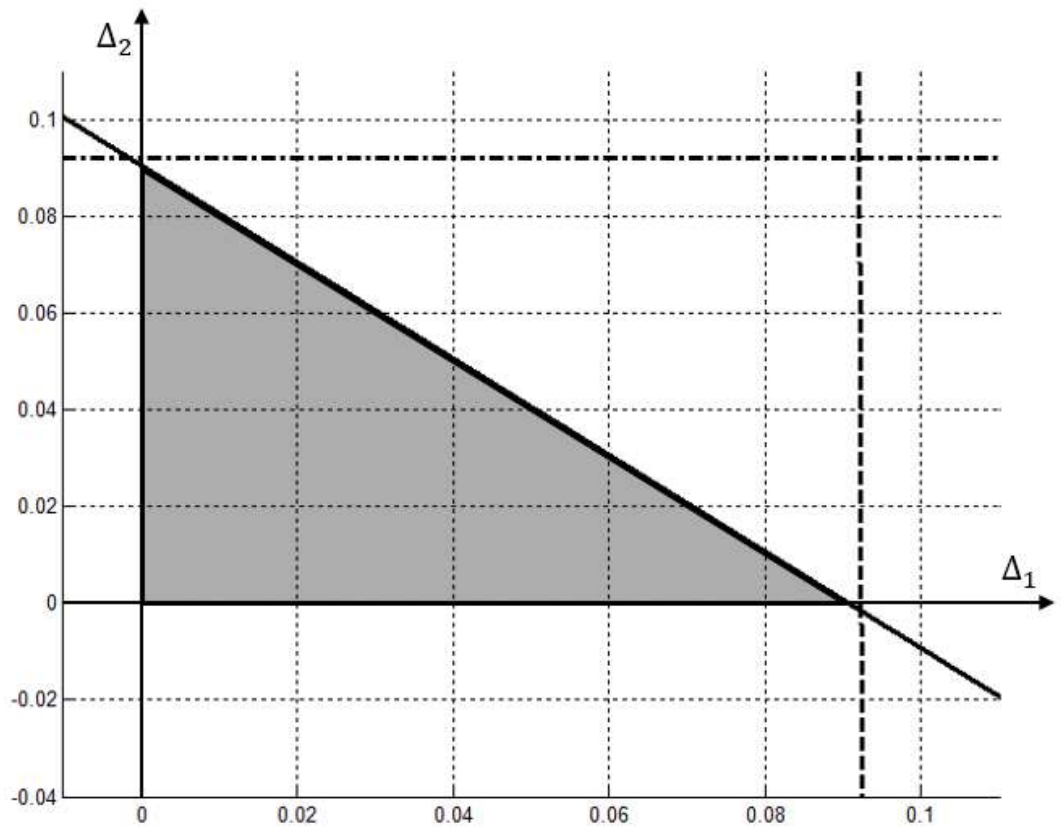


Рис.3. Область устойчивости уравнения (10) при разных значениях  $W_0, W_1, W_2$ .

### 3.3.1 Матричный случай

Рассмотрим второй случай, когда коэффициенты уравнения (10) являются матрицами. Пусть  $U(\tau)$  - матрица Ляпунова ассоциированная с симметричной матрицей  $W$ . Введем 2 вспомогательные матрицы

$$X(\tau) = U(\tau), \quad Y(\tau) = U(\tau - h), \quad \tau \in [0, h],$$

удовлетворяющие системе матричных уравнений

$$\begin{cases} \dot{X}(\tau) = X(\tau)A + Y(\tau)B \\ \dot{Y}(\tau) = -A^T Y(\tau) - B^T X(\tau) \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} X(0) = Y(h) \\ A^T X(0) + X(0)A + B^T X(h) + Y(0)B = -W \end{cases}$$

Подставим значения  $A, B$  и матрицу  $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ , где  $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}$

– константы. А также представим матрицы  $X, Y$  в виде

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} x_{11}(\tau) & x_{12}(\tau) \\ x_{21}(\tau) & x_{22}(\tau) \end{pmatrix}, Y(\tau) = \begin{pmatrix} y_{11}(\tau) & y_{12}(\tau) \\ y_{21}(\tau) & y_{22}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{11}(\tau) & \dot{x}_{12}(\tau) \\ \dot{x}_{21}(\tau) & \dot{x}_{22}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}(\tau) & y_{12}(\tau) \\ y_{21}(\tau) & y_{22}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{11}(\tau) & \dot{y}_{12}(\tau) \\ \dot{y}_{21}(\tau) & \dot{y}_{22}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}(\tau) & x_{12}(\tau) \\ x_{21}(\tau) & x_{22}(\tau) \end{pmatrix} \end{cases},$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{12}(0) \\ x_{21}(0) & x_{22}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}(h) & y_{12}(h) \\ y_{21}(h) & y_{22}(h) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}(h) & x_{12}(h) \\ x_{21}(h) & x_{22}(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11}(0) & y_{12}(0) \\ y_{21}(0) & y_{22}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Разобьем эту систему на 4 подсистемы:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_{11}(\tau) = -y_{11}(\tau) \\ y_{11}(\tau) = x_{11}(\tau) \end{cases}, & \begin{cases} \dot{x}_{12}(\tau) = -2y_{12}(\tau) \\ y_{12}(\tau) = x_{12}(\tau) \end{cases}, \\ \begin{cases} \dot{x}_{21}(\tau) = -y_{21}(\tau) \\ y_{21}(\tau) = 2x_{21}(\tau) \end{cases}, & \begin{cases} \dot{x}_{22}(\tau) = -2y_{22}(\tau) \\ y_{22}(\tau) = x_{22}(\tau) \end{cases}, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{11}(0) = y_{11}(h) \\ -x_{11}(h) - y_{11}(0) = -w_{11} \end{cases}, & \begin{cases} x_{12}(0) = y_{12}(h) \\ -x_{12}(h) - 2y_{12}(0) = -w_{12} \end{cases}, \\ \begin{cases} x_{21}(0) = y_{21}(h) \\ -2x_{21}(h) - y_{21}(0) = -w_{21} \end{cases}, & \begin{cases} x_{22}(0) = y_{22}(h) \\ -2x_{22}(h) - 2y_{22}(0) = -w_{22} \end{cases}. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем получим:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{11}(\tau) = -c_{11}^1 \sin \tau + c_{11}^2 \cos \tau \\ y_{11}(\tau) = c_{11}^1 \cos \tau + c_{11}^2 \sin \tau \end{cases}, \\ \begin{cases} x_{12}(\tau) = -\sqrt{2}c_{12}^1 \sin \sqrt{2}\tau + \sqrt{2}c_{12}^2 \cos \sqrt{2}\tau \\ y_{12}(\tau) = c_{12}^1 \cos \sqrt{2}\tau + c_{12}^2 \sin \sqrt{2}\tau \end{cases}, \\ \begin{cases} x_{21}(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{2}}c_{21}^1 \sin \sqrt{2}\tau + \frac{1}{\sqrt{2}}c_{21}^2 \cos \sqrt{2}\tau \\ y_{21}(\tau) = c_{21}^1 \cos \sqrt{2}\tau + c_{21}^2 \sin \sqrt{2}\tau \end{cases}, & \begin{cases} x_{22}(\tau) = -c_{22}^1 \sin 2\tau + c_{22}^2 \cos 2\tau \\ y_{22}(\tau) = c_{22}^1 \cos 2\tau + c_{22}^2 \sin 2\tau \end{cases}, \end{cases} \quad (13)$$

где  $c_{ij}^k$  – произвольные постоянные, при  $i, j, k = 1, 2$ .

Найдем решение, соответствующее начальным условиям

$$\begin{cases} c_{11}^2 = c_{11}^1 \cos h + c_{11}^2 \sin h \\ c_{11}^1 \sin h - c_{11}^2 \cos h - c_{11}^1 = -w_{11} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}c_{12}^2 = c_{12}^1 \cos \sqrt{2}h + c_{12}^2 \sin \sqrt{2}h \\ \sqrt{2}c_{12}^1 \sin \sqrt{2}h - \sqrt{2}c_{12}^2 \cos \sqrt{2}h - 2c_{12}^1 = -w_{12} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}c_{21}^2 = c_{21}^1 \cos \sqrt{2}h + c_{21}^2 \sin \sqrt{2}h \\ \sqrt{2}c_{21}^1 \sin \sqrt{2}h - \sqrt{2}c_{21}^2 \cos \sqrt{2}h - 2c_{21}^1 = -w_{21} \end{cases},$$

$$\begin{cases} c_{22}^2 = c_{22}^1 \cos 2h + c_{22}^2 \sin 2h \\ 2c_{22}^1 \sin 2h - 2c_{22}^2 \cos 2h - 2c_{22}^1 = -w_{22} \end{cases}.$$

Найдем из этих систем все постоянные  $c_{ij}^k$ , где  $i, j, k = 1, 2$ , и подставим их в общее решение (13) и проведем максимальные упрощения, получим матрицы вида

$$U(\tau) = X(\tau) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{w_{11}(\cos(\tau - h) - \sin \tau)}{2(1 - \sin h)} & \frac{w_{12}(2 \sin \sqrt{2}\tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(h - \tau))}{4 \sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} \\ \frac{w_{21}(\sin \sqrt{2}\tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(h - \tau))}{4 \sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} & \frac{w_{22}(\sin 2\tau - \cos 2(\tau - h))}{4(\sin 2h - 1)} \end{pmatrix},$$

$$U(\tau - h) = Y(\tau) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{w_{11}(\cos \tau - \sin(h - \tau))}{2(1 - \sin h)} & \frac{w_{12}(\sin \sqrt{2}(h - \tau) - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\tau)}{4 \sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} \\ \frac{w_{21}(2 \sin \sqrt{2}(h - \tau) - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\tau)}{4 \sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} & \frac{w_{22}(\sin 2(h - \tau) - \cos 2\tau)}{4(\sin 2h - 1)} \end{pmatrix}.$$

Проверим что выполняется равенство

$$X^T(\tau) = Y(h - \tau).$$

Для этого найдем

$$Y(h - \tau) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{w_{11}(\cos(h - \tau) - \sin \tau)}{2(1 - \sin h)} & \frac{w_{12}(\sin \sqrt{2}\tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(h - \tau))}{4\sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} \\ \frac{w_{21}(2 \sin \sqrt{2}\tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(h - \tau))}{4\sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} & \frac{w_{22}(\sin 2\tau - \cos 2(h - \tau))}{4(\sin 2h - 1)} \end{pmatrix},$$

$$X^T(\tau) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{w_{11}(\cos(\tau - h) - \sin \tau)}{2(1 - \sin h)} & \frac{w_{21}(\sin \sqrt{2}\tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(h - \tau))}{4\sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} \\ \frac{w_{12}(2 \sin \sqrt{2}\tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(h - \tau))}{4\sin \sqrt{2}h - 3\sqrt{2}} & \frac{w_{22}(\sin 2\tau - \cos 2(\tau - h))}{4(\sin 2h - 1)} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица  $W$  – симметричная, то  $w_{12} = w_{21}$ , поэтому видно, что  $X^T(\tau) = Y(h - \tau)$ . Следовательно,  $X(\tau)$  и есть матрица Ляпунова.

Переходим к отысканию функционала Ляпунова полного типа. Пусть система (10) является экспоненциально устойчивой. Выберем квадратичную форму  $w_0(x) = x^T W x$  и построим функционал  $v_0(\cdot)$ , производная вдоль решения (10) удовлетворяет равенству

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -w_0(x(t)), \quad t \geq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_0(x_t) &= x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 U(-\theta - h)Bx(t + \theta)d\theta + \\ &+ \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1)B \left[ \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2)Bx(t + \theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1. \end{aligned}$$

Теперь выберем функционал

$$w(x_t) = x^T(t)W_0x(t) + x^T(t - h)W_1x(t - h) + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)W_2x(t + \theta)d\theta.$$

С этой целью положим

$$W = W_0 + W_1 + hW_2$$

и построим соответствующий функционал Ляпунова. По построению

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -x^T(t)[W_0 + W_1 + hW_2]x(t), \quad t \geq 0.$$

Таким образом получим функционал Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} v(x_t) = & x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 U(-\theta - h)Bx(t + \theta)d\theta + \\ & + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1)B \left[ \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2)Bx(t + \theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1 + \\ & + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)[W_1 + (h + \theta)W_2]x(t + \theta)d\theta, \end{aligned}$$

где матрица  $U(\tau)$  при запаздывании  $h = 1$  выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} U(0) &= \begin{pmatrix} 1,69w_{11} & 0,84w_{12} \\ 0,84w_{21} & -1,17w_{22} \end{pmatrix}, \\ U(-\theta - h) &= \begin{pmatrix} \frac{w_{11}(\cos(-2 - \theta) - \sin(-\theta - 1))}{0,32} \\ \frac{w_{21}(\sin \sqrt{2}(-\theta - 1) - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(2 - \theta))}{-0,27} \\ \frac{w_{12}(2 \sin \sqrt{2}(-\theta - 1) - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(2 - \theta))}{-0,27} \\ \frac{w_{22}(\sin 2(-\theta - 1) - \cos 2(-2 - \theta))}{-0,36} \end{pmatrix}, \\ U(\theta_1 - \theta_2) &= \begin{pmatrix} \frac{w_{11}(\cos(\theta_1 - \theta_2 - 1) - \sin(\theta_1 - \theta_2))}{0,32} \\ \frac{w_{21}(\sin \sqrt{2}(\theta_1 - \theta_2) - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(1 - \theta_1 - \theta_2))}{-0,27} \\ \frac{w_{12}(2 \sin \sqrt{2}(\theta_1 - \theta_2) - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}(1 - \theta_1 - \theta_2))}{-0,27} \\ \frac{w_{22}(\sin 2(\theta_1 - \theta_2) - \cos 2(\theta_1 - \theta_2 - 1))}{-0,36} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем производную этого функционала

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{dv(x_t)}{dt} \right|_{\dot{x}(t) = (A + \Delta_1)x(t) + (B + \Delta_2)x(t-h)} = \\
& = \left. \frac{dv(x_t)}{dt} \right|_{\dot{x}(t) = \Delta_1 x(t) + Bx(t-h) + \Delta_2 x(t-h)} \leq \\
& \leq -x^2(t)[W_0 - \|\Delta_1\|(|U(0)| + h + 1) - \|\Delta_2\||U(0)|] - \\
& \quad - x^2(t-h)[W_1 - \|\Delta_2\|(1 + h)] - \\
& \quad - \left[ \lambda_{\min}(W_2) - (\|\Delta_1\| + \|\Delta_2\|) \max_{0 \leq \theta \leq h} |U(-\theta - h)B|^2 \right] \int_{-h}^0 x^2(t + \theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Получили систему вида

$$\begin{cases} W_0 - \|\Delta_1\|(|U(0)| + h + 1) - \|\Delta_2\||U(0)| > 0 \\ W_1 - \|\Delta_2\|(1 + h) > 0 \\ \lambda_{\min}(W_2) - (\|\Delta_1\| + \|\Delta_2\|) \max_{0 \leq \theta \leq h} |U(-\theta - h)B|^2 > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим следующие значения  $W_0, W_1, W_2$

$$W_0 = \begin{pmatrix} w_{01} & 0 \\ 0 & w_{02} \end{pmatrix}, W_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти значения в матрицу Ляпунова при разных значениях  $\tau$ , найдем следующие равенства

$$\begin{aligned}
|U(0)| &= \begin{pmatrix} 1,69(w_{01} + \alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 1,17(w_{02} + \alpha + \beta) \end{pmatrix}, \\
\max_{0 \leq \theta \leq h} |U(-\theta - h)B|^2 &= \begin{pmatrix} 1,72(w_{01} + \alpha + \beta)^2 & 0 \\ 0 & 2,07(w_{02} + \alpha + \beta)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Подставим полученную матрицу Ляпунова при разных значениях  $\tau$ , и значения  $W_0, W_1, W_2, \lambda_{\min}(W_2) = \beta$  в систему (14). Отобразим неравенства системы (14) в графическом виде на рисунке 4 (а, б), где пунктирной линией показано первое неравенство системы, штрихпунктирной – второе неравенство, сплошной – третье неравенство. Таким образом, при таких значениях  $W_0, W_1, W_2$ , область устойчивости решения уравнения (10) в

пространстве параметров, полученная методом функционалов Ляпунова-Красовского, при положительных  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  является область, выделенная серым цветом (Рис. 4b).

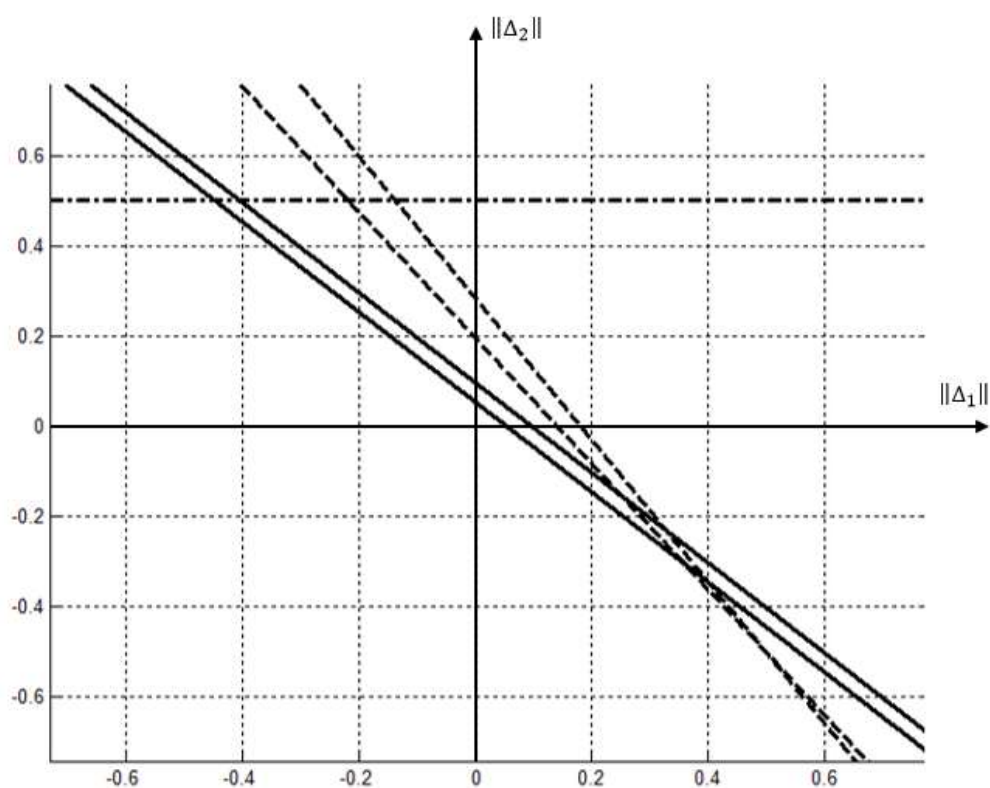


Рис. 4а. Представление системы (14) в графическом виде, при

$$w_{01} = w_{02} = \alpha = \beta = 1.$$



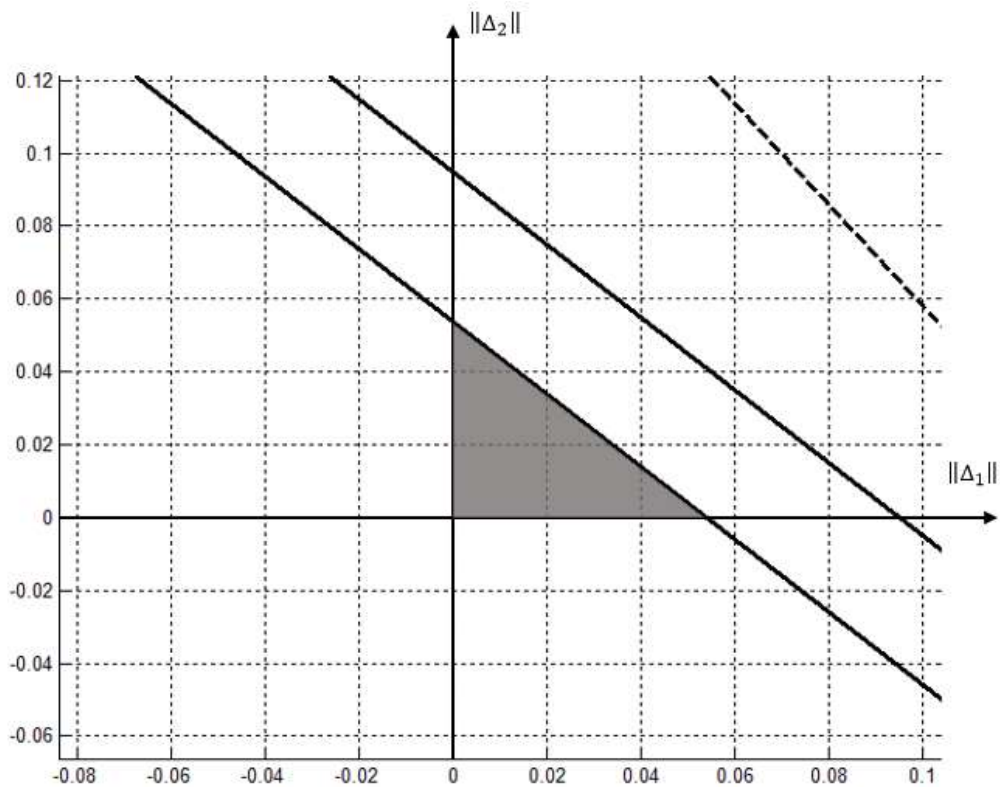


Рис. 4b. Область устойчивости в пространстве параметров.

Рассмотрим еще один вариант значений  $W_0, W_1, W_2$

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad W_1 = W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти значения в матрицу Ляпунова при разных значениях  $\tau$ , найдем следующие равенства

$$|U(0)| = \begin{pmatrix} 5,07 & 0,84\alpha \\ 0,84\alpha & 3,51 \end{pmatrix},$$

$$\max_{0 \leq \theta \leq h} |U(-\theta - h)B|^2 = \begin{pmatrix} 15,48 + 6,11\alpha^2 & 39,12\alpha \\ 10,65\alpha & 18,33 + 2,07\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Подставим полученную матрицу Ляпунова при разных значениях  $\tau$ , и значения  $W_0, W_1, W_2, \lambda_{\min}(W_2) = 1$  в систему (14). Отобразим полученные при таких значениях неравенства системы (14) в графическом виде на рисунке 5 (а, б), где пунктирной линией показано первое неравенство системы, штрихпунктирной – второе неравенство, сплошной – третье неравенство. Таким образом, для таких значений  $W_0, W_1, W_2$ , область устойчивости решения уравнения (10) в пространстве параметров, полученная методом функционалов Ляпунова-Красовского, при

положительных  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  является область, выделенная серым цветом (Рис. 5b.).

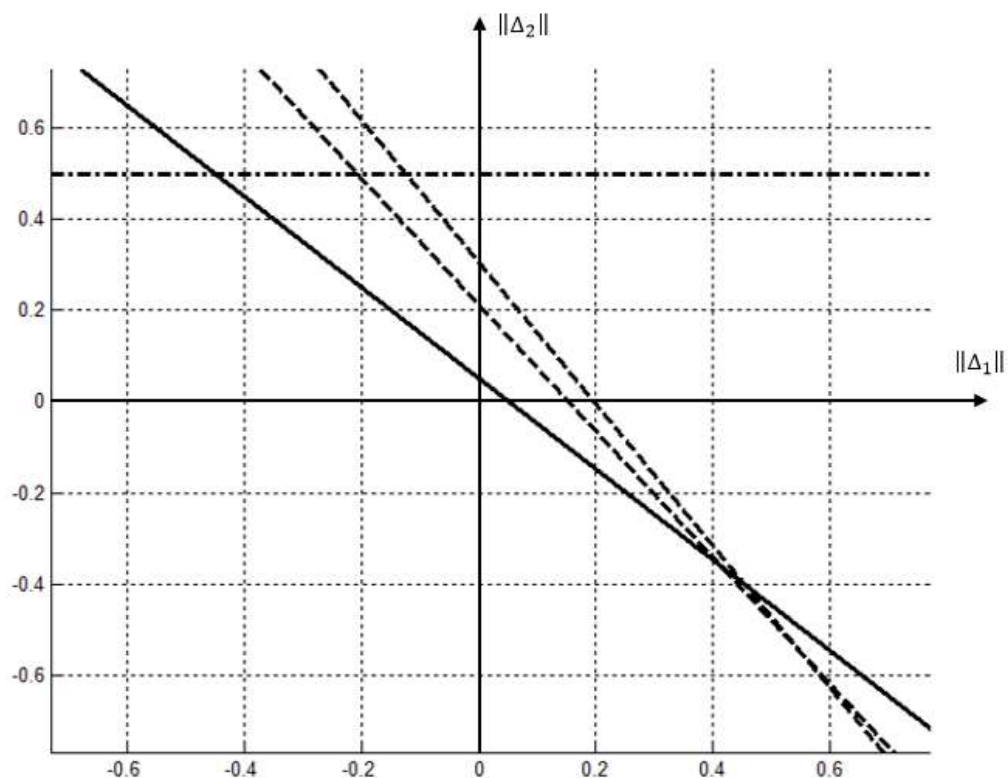


Рис. 5а. Представление системы (14) в графическом виде, при  $\alpha = 0.1$ .

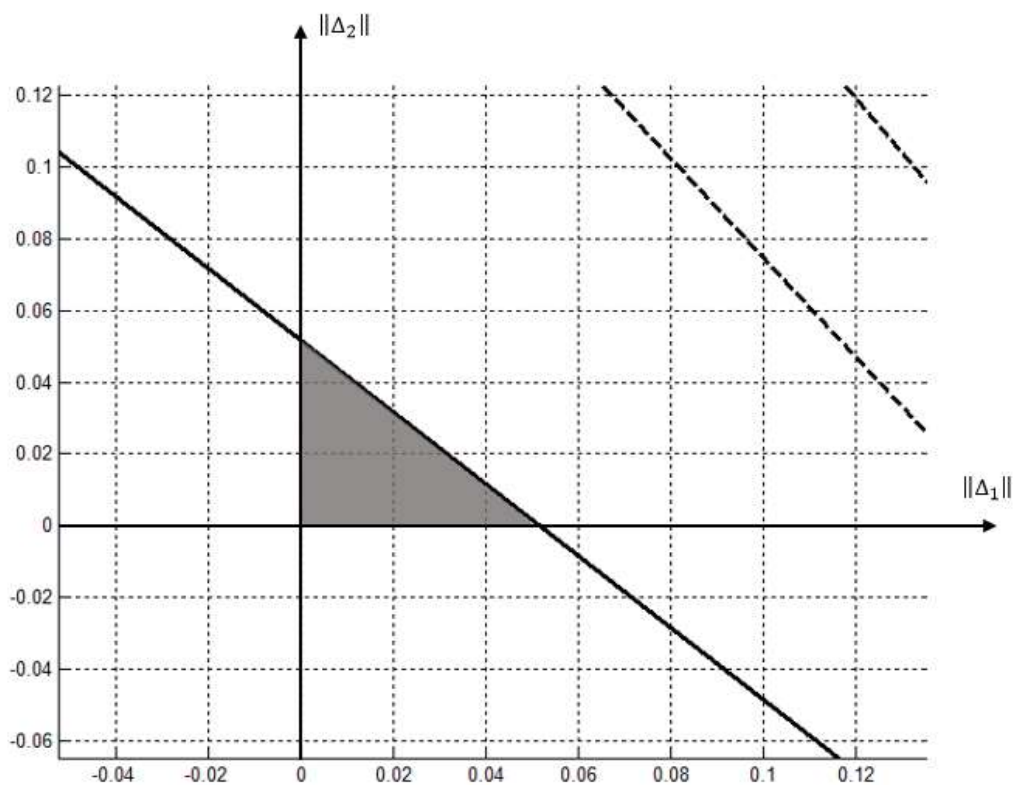


Рис. 5b. Область устойчивости в пространстве параметров.

Рассмотрим еще один случай. Проведем замену в системе (11):

$$\Delta_1 = \Delta_1 \tilde{A}, \Delta_2 = \Delta_2 \tilde{B}.$$

Найдем производную функционала при такой замене

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dv(x_t)}{dt} \right|_{\dot{x}(t) = (A + \Delta_1 \tilde{A})x(t) + (B + \Delta_2 \tilde{B})x(t-h)} = \\ & = \left. \frac{dv(x_t)}{dt} \right|_{\dot{x}(t) = \Delta_1 \tilde{A}x(t) + Bx(t-h) + \Delta_2 \tilde{B}x(t-h)} \leq \\ & \leq -x^2(t) [W_0 - |\Delta_1| (|\tilde{A}^T U(0)| + h + 1) - |\Delta_2| |\tilde{B}^T U(0)|] - \\ & - x^2(t-h) [W_1 - |\Delta_2| (1 + h)] - \int_{-h}^0 x^2(t+\theta) d\theta [\lambda_{\min}(W_2) - \\ & - |\Delta_1| \max_{0 \leq \theta \leq h} |\tilde{A}^T U(-\theta-h)B|^2 + |\Delta_2| \max_{0 \leq \theta \leq h} |\tilde{A}^T U(-\theta-h)B|^2]. \end{aligned}$$

Отсюда получим систему вида

$$\begin{cases} W_0 - |\Delta_1| (|\tilde{A}^T U(0)| + h + 1) - |\Delta_2| |\tilde{B}^T U(0)| > 0 \\ W_1 - |\Delta_2| (1 + h) > 0 \\ \lambda_{\min}(W_2) - |\Delta_1| \max_{0 \leq \theta \leq h} |\tilde{A}^T U(-\theta-h)B|^2 + |\Delta_2| \max_{0 \leq \theta \leq h} |\tilde{A}^T U(-\theta-h)B|^2 > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Рассмотрим следующие значения  $W_0, W_1, W_2$

$$W_0 = \begin{pmatrix} w_{01} & \gamma \\ \gamma & w_{02} \end{pmatrix}, W_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, w_{01}, w_{02}$  – изменяющие параметры. Подставляя эти значения в матрицу Ляпунова при разных значениях  $\tau$ , найдем следующие равенства

$$\begin{aligned} |\tilde{A}^T U(0)| &= \alpha \begin{pmatrix} 1,69(w_{01} + \alpha + \beta) & \gamma \\ \gamma & 1,17(w_{02} + \alpha + \beta) \end{pmatrix}, \\ |\tilde{B}^T U(0)| &= \beta \begin{pmatrix} 1,69(w_{01} + \alpha + \beta) & \gamma \\ \gamma & 1,17(w_{02} + \alpha + \beta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\max_{0 \leq \theta \leq h} |\tilde{A}^T U(-\theta - h) B|^2 = \alpha^2 \left( \frac{1,72(w_{01} + \alpha + \beta)^2 + 6,12\gamma^2}{\gamma(1,69(w_{01} + \alpha + \beta) + 6,83(w_{02} + \alpha + \beta))} \right. \\ \left. \frac{\gamma(6,21(w_{01} + \alpha + \beta) + 6,83(w_{02} + \alpha + \beta))}{6,12\gamma^2 + 2,07(w_{02} + \alpha + \beta)^2} \right).$$

Подставим выражения (16) и значения  $W_0, W_1, W_2, \lambda_{\min}(W_2) = \beta$  в систему (15). Отобразим полученные при такой подстановке неравенства системы (15) в графическом виде на рисунке 6 (а, б), где пунктирной линией отображено первое неравенство системы, штрихпунктирной – второе неравенство, сплошной – третье неравенство. Таким образом область устойчивости решения уравнения (10) в пространстве параметров, для данного случая, полученная методом функционалов Ляпунова-Красовского, при положительных  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  является область, выделенная серым цветом (Рис. 6б.).

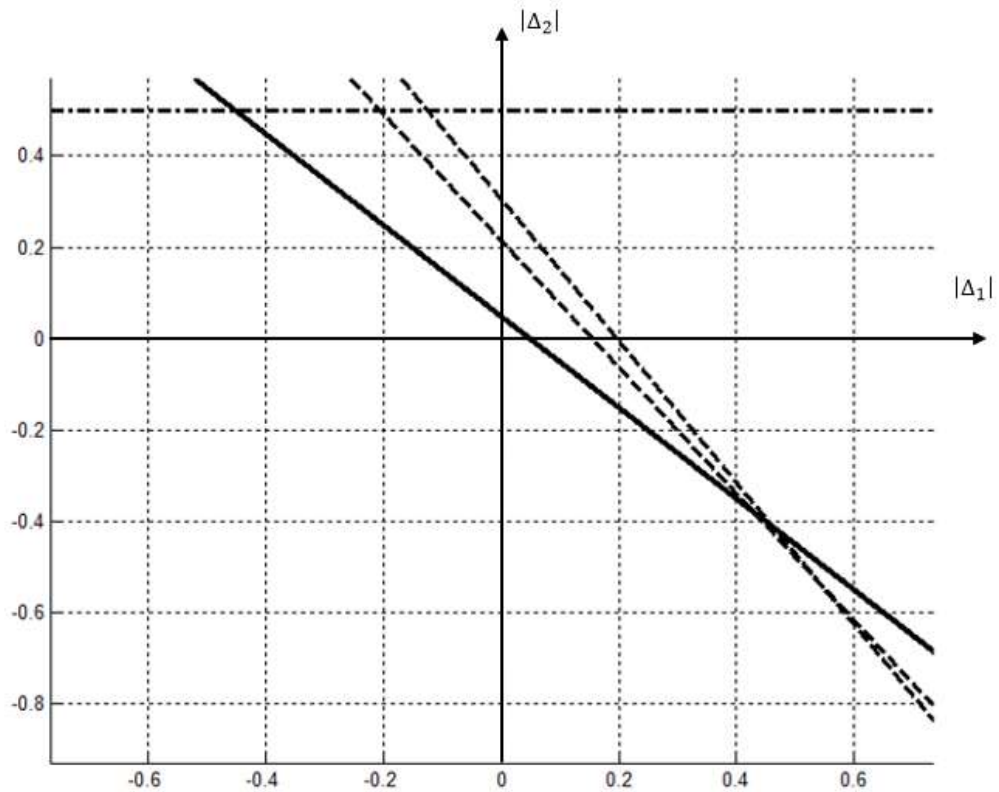


Рис. 6а. Представление системы (15) в графическом виде, при

$$w_{01} = w_{02} = \alpha = \beta = 1, \gamma = 0.1.$$

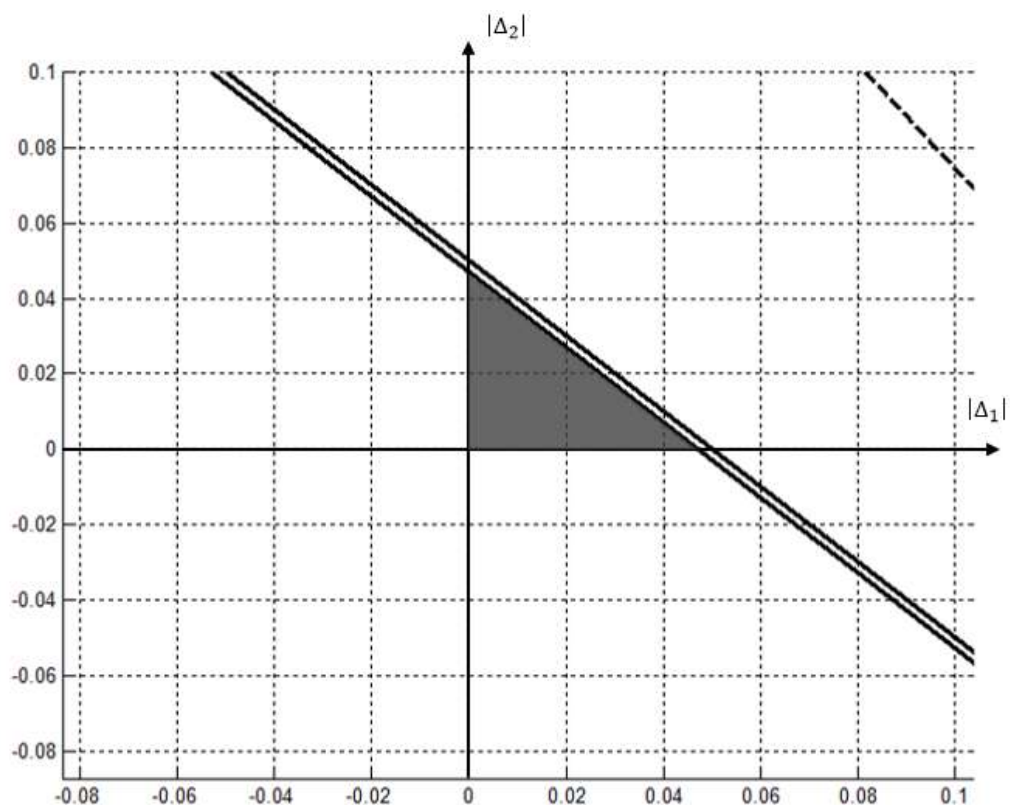


Рис. 6b. Область устойчивости в пространстве параметров.

Очевидно что при различных допустимых значениях параметров  $\alpha, \beta, \gamma, w_{01}, w_{02}$  получаются различные области. Поэтому объединение построенных областей дает большую область устойчивости в пространстве параметров. Обозначим за  $S$  – область устойчивости уравнения (10) в пространстве параметров, полученную с помощью системы (15), при определенных параметрах  $\alpha, \beta$ . При уменьшении значения  $\alpha$  область  $S$  будет увеличиться вдоль оси параметра  $\Delta_1$ , а при уменьшении значения  $\beta$  область  $S$  увеличится вдоль оси параметра  $\Delta_2$ . При увеличении параметра  $\gamma$  область  $S$  уменьшается, так же как при изменении параметров  $w_{01}, w_{02}$ , поэтому эти параметры оставим неизменными. Поскольку допустимая область изменения параметров это есть объединение областей устойчивости:

$$\hat{S} = \bigcup_{(\alpha, \beta)} S, \quad \begin{cases} 0.1 \leq \alpha \leq 1 \\ 0.1 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

то полученная таким образом область  $\hat{S}$  тоже будет являться областью устойчивости уравнения (10) в пространстве параметров.

На рисунке 7 серым цветом отображена область  $\hat{S}$ .

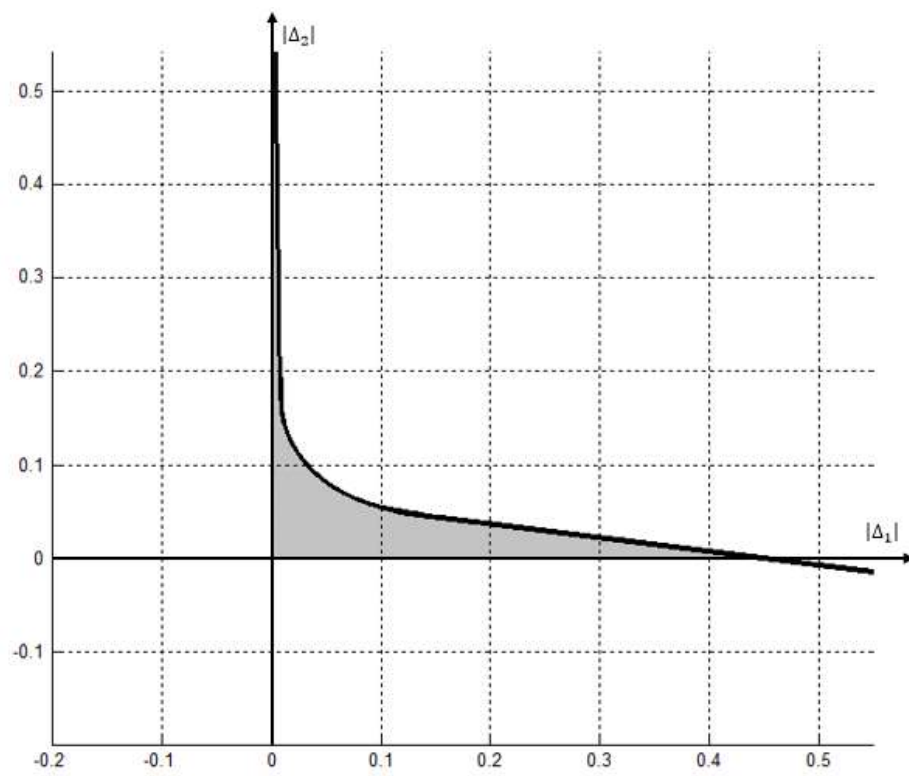


Рис. 7.

## **Выводы**

В работе рассматривались методы анализа робастной устойчивости линейных стационарных систем дифференциально разностных уравнений запаздывающего типа, и были получены следующие результаты:

1. Построена математическая модель эпидемии гриппа и проведено сравнение с моделью «Барояна-Рвачева».
2. Выведены конструктивные оценки допустимых границ неопределенных параметров в задаче робастной устойчивости.
3. Разработано программное обеспечение, реализующее выведенные алгоритмы.
4. Для конкретных систем построены, области допустимых изменений неопределенных параметров.

## Список литературы

1. Бароян О.В., Рвачев Л.А., Иванников Ю.Г. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР. М., ИЭМ. им. Н.Ф. Гамалеи, 1977. 546с.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967, 548с.
3. Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последствием. ПММ, т. 20, вып. 4, 1956, с.513-518.
4. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1951, 256 с.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.В. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971, 296 с.
6. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15-20.
7. Kharitonov V.L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. New York: Birkhauser, Basel, 2013. 311 p.
8. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по городу Санкт-Петербургу и Ленинградской области [электронный ресурс]/ Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики – Режим доступа: [http://petrostat.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_ts/petrostat/ru/statistics/Leningradskaya\\_area/population](http://petrostat.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_ts/petrostat/ru/statistics/Leningradskaya_area/population).
9. Управление федеральной службы по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека по Ленинградской области [электронный ресурс]/ Официальный сайт Роспотребнадзора – Режим доступа: <http://47.rospotrebnadzor.ru/380>.



## Приложение

Алгоритмы для отыскания допустимых областей изменения неопределенных параметров при анализе устойчивости линейных систем с запаздыванием (стр. 19 - 38) реализованы в среде Matlab. Входными данными являются изменяющиеся параметры  $\alpha, \beta, \gamma, w_{01}, w_{02}$ . Выходными являются отображения этих алгоритмов в графическом виде. Ниже приведены коды реализации алгоритмов:

### 1. Код программы для построения рисунка 4

```
w01=1;
w02=1;
a=1; %alfa
b=1; %betta
x=[-5,5];
y11=(w01-x*(2+1.69*(w01+a+b)))/(1.69*(w01+a+b));
y12=(w02-x*(2+1.17*(w02+a+b)))/(1.17*(w02+a+b));
y21=a/2;
y22=a/2;
y31=(b/(1.17*(w01+a+b)*(w01+a+b)))-x;
y32=(b/(2.07*(w02+a+b)*(w02+a+b)))-x;
plot(x,y11,'k--+',x,y12,'k--+',x,[y21,y21],
      'k-.',x,y31,'k',x,y32,'k','LineWidth',2.5)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
grid
```

### 2. Код программы для построения рисунка 5

```
alfa=0.1;
x=[-5,5];
y11=(1+alfa-x*(2+5.07+0.84*alfa))/(5.07+0.84*alfa);
y12=(1+alfa-x*(2+0.84*alfa+3.51))/(0.84*alfa+3.51);
y21=1/2;
y22=1/2;
y31=(1/(15.48+6.11*(alfa^2)+39.12*alfa))-x;
y32=(1/(10.65*alfa+18.33+2.07*(alfa^2)))-x;
plot(x,y11,'k--+',x,y12,'k--+',x,[y21,y21],
```

```
'k-.',x,y31,'k',x,y32,'k','LineWidth',2.5)
axis ([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
grid
```

### 3. Код программы для построения рисунка 6

```
w01=1;
w02=1;
a=0.1; %alfa
b=1; %betta
g=0.1; %gamma
x=[-5,5];
y11=(w01+g-x*(2+1.69*(w01+a+b)*a+0.84*a*g))/(1.69*(w01+a+b)*b+
0.84*g*b);
y12=(w02+g-x*(2+1.17*(w02+a+b)*a+0.84*a*g))/(1.17*(w02+a+b)*b+
0.84*g*b);
y21=a/2;
y22=a/2;
a0Ua1=1.77*(a^2)*((w01+a+b)^2)+6.12*(a^2)*(g^2)+
(a^2)*g*(6.21*(w01+a+b)+6.83*(w02+a+b));
a0Ua2=(a^2)*g*(1.69*(w01+a+b)+6.83*(w02+a+b))+
6.12*(a^2)*(g^2)+2.07*(a^2)*((w02+a+b)^2);
a1Ua1=1.77*(b^2)*((w01+a+b)^2)+6.12*(b^2)*(g^2)+
(b^2)*g*(6.21*(w01+a+b)+6.83*(w02+a+b));
a1Ua2=(b^2)*g*(1.69*(w01+a+b)+6.83*(w02+a+b))+
6.12*(b^2)*(g^2)+2.07*(b^2)*((w02+a+b)^2);
y31=(b-x*a0Ua1)/a1Ua1;
y32=(b-x*a0Ua2)/a1Ua2;
plot(x,y11,'k--+',x,y12,'k--+',x,[y21,y21],
'k-.',x,y31,'k',x,y32,'k','LineWidth',2.5)
axis ([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
grid
```